Exercices CIMPA Bejaia 2021

1 Première séance

Exercice 1 *Consider the map $x \mapsto 2x \mod 1$ on $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Prove that for every integer n the point $\frac{p}{2^n-1}$ where p is an integer, is periodic of period at most n. Find some conditions on p to have a point of period exactly n.*

Soit $y = p/(2^n - 1)$,

$$T^n(y) = 2^n y \mod 1 = 2^n p/(2^n - 1) \mod 1 = p + p/(2^n - 1) \mod 1 = p/(2^n - 1) \mod 1 = y$$

Donc y est bien de période au plus n. Et même sa période divise n.
Si la période de y vaut exactement n, cela signifie que $T^n y = y$ et que $T^d y \neq y$ si d diviseur de n.

Soit d diviseur strict de n. On calcule $T^d(y)$. On cherche des conditions sur p pour que cela soit différent de y.

$T^d(y) = 2^d y \mod 1$. On raisonne par contradiction. Si $T^d(y) = y$, alors $2^d y - y = q$ avec q entier et donc $y = q/(2^d - 1)$.
On a l'égalité

$$p/(2^n - 1) = q/(2^d - 1)$$
$$p(2^d - 1) = q(2^n - 1)$$

L'hypothèse d divise n se traduit par $n = dk$.

$$p(2^d - 1) = q(2^{dk} - 1) = q((2^d)^k - 1)$$

On sait que $X^k - 1 = (X - 1)(1 + X + \cdots + X^{k-1})$.

$$p(2^d - 1) = q(2^d - 1)(1 + 2^d + \cdots + 2^{d(k-1)})$$

$$p = q(1 + 2^d + \cdots + 2^{d(k-1)})$$

Si p n'est pas de cette forme, alors y sera bien de période exactement n.

Exemple $n = 4$.
y est de la forme $p/15 \mod 1$. Il y a au plus 15 points de période 4 : $0, 1/15, 2/15, , \ldots 14/15$.
Dans la formule $p = q(1 + 2^d + \cdots + 2^{d(k-1)})$ si on prend $q = 1, d = 2, k = 2$, alors $p = 5$. Donc $y = 5/15 = 1/3$. La période de y est 2 et pas 4.
$Ty = 2/3, T^2 y = 4/3 \mod 1 = 1/3 = y$.

Exercice 2 *Consider $X = \{(01)^\omega, (10)^\omega\}$. Prove it is a subshift and compute the complexity function of this subshift.*

X stable par S car $S(01...01...01) = 10..10..10$. Et de même $S(10101...01...) = 01...01...$,donc $SX \subset X$.
X est un ensemble à deux éléments donc fermé. Donc c'est un sous-shift.
Trouver la complexité signifie calculer $p(n)$ pour tout entier n. Trouver le nombre de mots de longueur n pour tout entier n.

$p(1) = 2$ car on a les mots 0 et 1.
Mots de longueur deux $10, 01$ et $p(2) = 2$.
Mots de longueur trois : $010, 101$.
On pense que $p(n) = 2$ pour tout entier $n > 0$.
On peut énumérer les mots de longueur n : Il y a $010101\ldots$ et $1010101\ldots$

Exercice 3 *Consider $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ the set of sequences which contain exactly one 1. Show that X is shift-invariant, but that X is not a subshift.*

La notion de shift invariant signifie que $SX \subset X$.

$S(0001000\ldots) = 001000\ldots$ Si la suite est de la forme $S(100000\ldots0) = 0000\ldots$. Cela n'apparaît pas car les suites sont indexées sur $\mathbb{Z}$.

$S(\ldots000.10000\ldots) = \ldots001.000\ldots$

Donc X est bien shift invariant.

Si ce n'est pas un sous-shift, X n'est pas fermé. On peut trouver une suite d'éléments $(x^n)_n$ de X dont la limite n'est pas dans X. C'est une suite et chaque élément de la suite est un mot infini : donc un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Il faut que la limite soit ne contienne pas de 1, soit en contienne au moins deux.

$$x^1 = \ldots000.1000\ldots0\ldots$$
$$x^2 = \ldots000.01000\ldots0\ldots$$
$$x^3 = \ldots000.001000\ldots0\ldots$$

$$x^n = \ldots0.00\ldots010000\cdots \in X$$

Question : la suite $(x^n)_n$ converge t- elle ?

Réponse : oui vers
$$y = \ldots0.0000000\ldots0 \notin X$$

On peut calculer la distance entre x^n et y : $d(x^n, y) = 2^{-n}$ car elles coincident sur un préfixe de longueur n. Donc $\lim_{+\infty} d(x^n, y) = 0$. Donc X n'est pas fermé.

Exercice 4

1. *What is the closure of the orbit of $x = 01111\ldots$ under the shift map ? Is this subshift minimal, transitive ?*
2. *Is the following subshift minimal, transitive ? $X = \{0^\omega\}$.*

$Sx = 11111\ldots$ et $S^2x = Sx$. Donc x est ultimement périodique. L'adhérence de l'orbite de x est un ensemble à deux éléments.

Ce sous shift contient deux éléments $01111\ldots$ et $111\ldots$. Le sous shift de la première question n'est pas minimal car $111\ldots1\ldots$ n'a pas une orbite dense. Il est transitif car l'orbite de $01111\ldots$ est dense.

X possède un seul élément donc il y a une seule orbite à un seul élément, donc il est minimal.

Exercice 5 *The subshift is irreducible if for every finite words $u, v \in \mathcal{L}(X)$, there exists $w \in \mathcal{L}(X)$ such that uwv also belongs to the language*

1. *Find an example of an irreducible subshift.*
2. *Find an example of a non irreducible subshift.*

$X = 111\ldots111$ est bien un sous shift car il est fermé et stable par S. Dans son langage il y a un seul mot de chaque longueur n : c'est $1111\ldots1$. Il est bien irréductible.

Soit $Y = \{01010101\ldots01, 10101010\ldots\}$. $u = 01, v = 01$, on pose $w = 01$ et 010101 est dans le langage.

$u = 0, v = 1$, alors 0101 est dans le langage, et $w = 10$.

Si on considère le sous-shift $Z = \{0100000, 1000000, 000000\}$

$u = 10, v = 01$, alors $uwv = 10w01$, or aucun des mots infinis ne contient deux 1. Ce sous shift est non irréductible.

2 Deuxième séance

Exercice 6 *Describe the subshift of finite type defined on a two letters alphabet by*

$$F = \{00, 101\}.$$

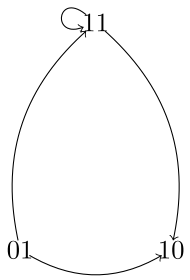
$1111\ldots1\ldots$ est dans le sous-shift
et $01111\ldots1\ldots$ aussi.

Il faut tracer un graphe tel que les chemins infinis dans ce graphe sont les éléments du sous shift.

Les sommets sont les mots de longueur deux car le plus grand mot interdit a longueur trois. Il y a 3 sommets : $01, 10, 11$. Les arêtes sont des mots de longueur 3.Une arête relie le sommet U vers le sommet V s'il existe deux lettres a, b telles que $Ua = bV$. On liste les mots de longueur 3. Il y en a 4 : $010, 011, 110, 111$.

110 est une arête de 11 vers 10 car $11.0 = 1.10$.

Donc le graphe est de la forme



Les éléments de X_F sont les chemins infinis dans ce graphe.

Il n'y a que deux mots infinis

$$11111\ldots1\ldots$$

$$01111\ldots1\ldots$$

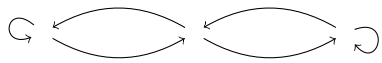
Matrice associée avec les sommets dans l'ordre $01, 10, 11$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$h_{top}(X) = \log(\lambda)$ avec la plus grande valeur propre. Les valeurs propres de la matrice : 0 avec multiplicité deux, et 1. Donc l'entropie du SFT est $\log(1) = 0$.

Le nombre de points périodiques est donné par $\sum_{d|n} b(d) = tr(A^n) = 0^n + 1^n = 1$. On en déduit que $b(1) = 1$ et $b(n) = 0$ si $n > 1$.

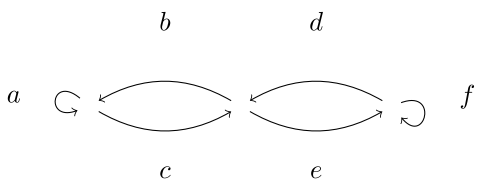
Le seul point périodique est le mot infini $1111\ldots1\ldots$ qui est de période un.

Exercice 7 *Show that the subshift described by the following graph is sofic : The two loops have the same name, and the other edges have different names.*



Find a SFT which projects on it.

Pour trouver le SFT, on nomme les arêtes avec des lettres différentes. Cela fait un alphabet à 6 lettres $\{a, b, c, d, e, f\}$ de gauche à droite



La liste des mots interdits est

$$G = \{ab, ae, ad, af, bb, bd, be, bf, ca, cc, cd, cf, da, dc, dd, df, ea, eb, ec, ee, fa, fb, fc, fe\}$$

On peut décrire le graphe associé à X_G. Il a 6 sommets, et il a $36 - 24 = 12$ arêtes. Par exemple les arêtes commencant par a sont aa, ac. Celles qui commencent par d sont db, de.

La projection qui permet de passer de X_G à X est $f \mapsto a$.
On peut montrer que l'on a toujours $h(X_G) \geq h(X)$.

Exercice 8 *On a two letters alphabet, describe some properties of the SFT of zero entropy.*

Il est clair que les SFT complètement périodiques sont d'entropie nulle. La réciproque est fausse via l'exercice 6.
Si le SFT a entropie nulle, alors la plus grande valeur propre vaut 1.
La matrice du SFT est une matrice entière de taille deux, de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$tr(M) = a + d$ est un entier et c'est la somme des valeurs propres qui sont 1 et x. Donc $a + d = 1 + x$ mais $|x| \leq 1$.Donc x est entier et vaut $-1, 0$ ou 1. Donc $tr(M)$ vaut deux, ou 1 ou 0.
On cherche les points périodiques : $\sum_{d|n} b(d) = tr(M^n) = 1 + x^n$, donc c'est borné.
A partir de là, il doit falloir en déduire que le SFT ne contient presque que des points périodiques.

Exercice 9 *Prove that the map $x \mapsto (x + \sqrt{2}) \mod 1$ defined on $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ is ergodic for the Lebesgue measure (which is invariant).*

On va commencer par voir que la mesure de Lebesgue est invariante
$m(T^{-1}A) = m(A)$ pour A ensemble mesurable. On va se restreindre au cas A intervalle $[a, b]$. On cherche $T^{-1}A$.
On cherche les x tels que $a < x + \sqrt{2} \mod 1 < b$ soit $a < x + \sqrt{2} + n < b$. Mais $[a, b] \subset [0, 1]$, donc $E(x + \sqrt{2} + n) = 0$, or $x < 1$, on en déduit que $1 + n = 0$ au maximum. Donc n prend au plus deux valeurs.
Dans un cas on a $a - \sqrt{2} - n < x < b - \sqrt{2} - n$. On calcule et $m([a - \sqrt{2} - n, b - \sqrt{2} - n]) = b - a$.
Dans l'autre il y a deux intervalles dont la somme

Il faut voir qu'elle est ergodique. On cherche une fonction f telle que $f \circ T = f$. Et on prouve que f est constante.

$$f(x + \sqrt{2} \mod 1) = f(x)$$

On peut prendre f fonction 1 périodique et $f(x + \sqrt{2}) = f(x)$. La période serait aussi $\sqrt{2}$.
On la développe en série de Fourier, $f(x) = \sum_n c_n e^{i2\pi nx}$.

$$\sum_n c_n e^{i2\pi n\sqrt{2}} e^{i2\pi nx} = \sum_n c_n e^{i2\pi nx}.$$

Donc on a $c_n e^{i2\pi n\sqrt{2}} = c_n$, soit $c_n(1 - e^{i2\pi n\sqrt{2}}) = 0$. Comme $\sqrt{2}$ n'est pas entier, on en déduit sauf pour $n = 0$ que $c_n = 0$. Donc f est une fonction constante, ce qui prouve l'ergodicité.

Exercice 10 *Consider the map $x \mapsto Tx = \frac{1}{x} \mod 1$. Prove that the following measure given by the density function $d\mu = f dx$ is invariant : $f(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}$*

Par définition si $A \subset [0, 1]$ alors $\mu(A) = \int_A f(x)dx$.
Il faut montrer que pour tout ensemble mesurable A, $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$. On va le faire pour A un intervalle $[a, b]$.
$\mu(A) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\log 2} \int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(1+b)}{(1+a)}$.
Exprimons $T^{-1}A$. On cherche x tel que $a < 1/x \mod 1 < b$ On a $a < 1/x + n < b$ soit x est dans l'intervalle $[1/(b - n), 1/(a - n)]$.

$$T^{-1}A = \bigcup_{n \geq 0} [1/(b - n), 1/(a - n)]$$

On calcule $\mu([1/(b - n), 1/(a - n)]) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{1+1/(a-n)}{1+1/(b-n)}$.

$$\frac{1}{\log 2}[\log(a - n + 1) - \log(a - n)] - \frac{1}{\log 2}[\log(b - n + 1) - \log(b - n)]$$

On calcule $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\log 2}[\log(a - n + 1) - \log(a - n)]$. C'est une somme téléscopique. De même pour l'autre
On arrive à $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

3 Exercices en plus

3.1 Subshifts

Exercice 11 *Consider the map* $x \mapsto 2x \mod 1$ *on* $\mathbb{T}^1$*. Prove that for every integer* n *the point* $\frac{p}{2^n-1}, 0 \leq p < 2^n - 1$ *is periodic of period at most* n*. Find some conditions on* p *which implies that the period is exactly* n*.*

Exercice 12 *Consider* $X = \{(01)^\omega, (10)^\omega\}$*. Prove it is a subshift and compute the complexity function of this subshift.*

Exercice 13 *Consider* $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *the set of sequences which contain exactly one* 1*. Show that* X *is shift-invariant, but that* X *is not a subshift.*

Exercice 14

1. *What is the closure of the orbit of* $x = 01111\dots$ *under the shift map ?*
2. *Is the following subshift minimal, transitive ?* $X = \{0^\omega\}$.

Exercice 15 *The subshift is irreducible if for every finite words* $u, v \in \mathcal{L}(x)$*, there exists* $w \in \mathcal{L}(X)$ *such that* uwv *also belongs to the language*

1. *Find an example of an irreducible subshift.*
2. *Find an example of a non irreducible subshift.*

Exercice 16 *Consider an alphabet with 2 letters, and* X *the set of sequences such that* $u_n = 1$ *implies* $u_{n+1} = u_{n+2} = 0$.

1. *Find the elements of* X *fixed by the shift map.*
2. *Prove that the frequency of* 1 *in an element of* X *is not well defined.*

Exercice 17 *Consider the translation by* $\frac{3}{7}$ *on* $\mathbb{T}^1$.

1. *Describe the different orbits.*
2. *Find two invariant measures.*

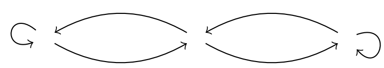
3.2 SFT

Exercice 18 *Describe the subshift of finite type defined by*

$$F = \{00, 101\}.$$

Exercice 19 *Compute the entropy of the even shift map.*✠

Exercice 20 *Show that the subshift described by the following graph is sofic : The two loops have the same name, and the other edges have different names.*



Find a SFT which projects on it.

Exercice 21 *Consider the following sliding block code on the full shift on a two letter alphabet :*

$$\varphi(abcd) = b + a(c+1)d \mod 2$$

Consider its restriction to $[-1, 2]$*. Compute the images of* $1001, 1101$*. What can you remark ?*

Exercice 22 *On a two letters alphabet, describe some properties of the SFT of zero entropy.*

Exercice 23 *Find the bispecial words of the language of the SFT given by* $\mathcal{F} = \{11\}$.

Exercice 24 *Compute the Parry measure for the SFT given by* $F = \{111\}$.

3.3 Substitutions

Exercice 25 *Consider the following substitution*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{A}^* & \to & \mathcal{A}^* \\ & a & \mapsto & aba \\ & b & \mapsto & a \end{array}$$

1. *Compute the incidence matrix, and show it is a primitive substitution.*
2. *Compute the frequencies of the letters.*

Exercice 26 *Consider a factorial language. A Rauzy graph G_n is a graph where vertices are words of length n of the language, and there is an oriented arrow between u and v if there exist two letters a, b such that $ua = bv$ and ua belongs to the language.*

1. *Draw the Rauzy Graph $G_n, n = 2, \dots 4$ for the Fibonacci word.*
2. *Do the same thing for the Thue Morse word.*
3. *What are the differences ?*

Exercice 27 *Compute the complexity of the language of the subshift defined by the substitution*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{A}^* & \to & \mathcal{A}^* \\ & a & \mapsto & ab \\ & b & \mapsto & ac \\ & c & \mapsto & a \end{array}$$

Exercice 28

1. *Find one substitution with a non minimal subshift.*
2. *find a substitution, where every element of the subshift is periodic.*
3. *Find a substitution over a three letters alphabet, where the frequencies of each letter is a rational number.*

Exercice 29 *For the Fibonacci substitution compute the measures of the cylinders* $[0]$ *and* $[01]$.

3.4 Measures

Exercice 30 *Consider the map*

$$T(x) = \begin{cases} x + \varphi - 1 & [0, 2 - \varphi) \\ x + \varphi - 2 & [2 - \varphi, 1) \end{cases}$$

- *Prove that there is no periodic point.*
- *Is there a link with a rotation on $\mathbb{T}^1$?*
- *Consider the first return map S of T on $[2 - \varphi, 1)$*

  $$S(x) = T^k x, k = \inf\{n, T^n x \in [2 - \varphi)\}$$

  Compute S. What is the link between S and T ?
- *Consider the subshifts associated to T, S on a 2 letters aphabet. Compute the coding of $x \in [2 - \varphi, 1)$ for the two maps, and show that they are related by a substitution.*

Exercice 31 *Consider an ergodic measure μ of the system (X, T). Let A be a set such that $T^{-1}A \subset A$, then prove that $\mu(A)$ is equal to* 0 *or* 1.

Exercice 32 *Prove that the map $x \mapsto (x + \sqrt{2}) \mod 1$ defined on $\mathbb{T}^1$ is ergodic for the Lebesgue measure.*

Exercice 33 *Consider the set $X = [0, 1]$.*

1. *Prove that every element $x \in X$ can be written in an unique way as $x = \sum x_n / 2^n$ with $x_n \in \{0, 1\}$ and x_n non ultimately equal to* 1.

2. *Now we define $T : X \to X$ by $Tx = y$ with* $\begin{cases} y_n = x_{n+2}, n = 2k+1 \\ y_2 = x_1 \\ y_n = x_{n-2}, n = 2k \end{cases}$. *Prove that T preserves the Lebesgue measure.*
3. *Prove that (X, T) is transitive.*

Exercice 34 *Consider the map $x \mapsto \frac{1}{x} \mod 1$. Prove that the following measure $d\mu = f dx$ is invariant : $f(x) = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x}$*

Exercice 35 *Consider the dynamical system defined over $[0, 1]$ by$x \mapsto 4x(1 - x)$. Prove that the following measure is an invariant measure*

$$\mu(B) = \frac{1}{\pi}\int_B \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Exercice 36 *Consider the system $x \mapsto \varphi x \mod 1$ and let us denote $\alpha = \varphi^{-1}$. Prove that the measure $d\mu = h(x)dx$ is an invariant measure :*

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+\alpha^3} & [0, \alpha] \\ \frac{\alpha}{\alpha+\alpha^3} & \end{cases}$$

Exercice 37 *Consider the system with $X = [0, 1]$ and*

$$x \mapsto Tx = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x) & x > 1/2 \end{cases}$$

Prove that the Lebesgue measure is invariant and ergodic. To which subshift is related this map ?