Dynamique symbolique

N. Bédaride
I2M, Marseille

On considère $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et l'application $T : x \mapsto 3x$.

Ce sont les réels modulo un, on peut donc représenter un $x \in X$ par un élément de $[0, 1[$.

(X, T) s'appelle un système dynamique (discret). On cherche à connaître pour $x \in X$ le comportement de la suite $(T^n(x))_n$ qui est l'orbite de x.

Proposition

Si $x \in X$ vérifie $T^n x = x$ avec $n \geq 0$, alors x est rationnel.

Proof.

Facile $T^n x = x$ alors $3^n x = x \mod 1$. D'ou $x = \frac{p}{3^n - 1}$. □

On parle d'orbite périodique.

Proposition

$\frac{1}{3}$ n'a pas une orbite périodique.

Proof.

$T(1/3) = 0$, $T(0) = 0$. $\square$

On parle d'orbite ultimement périodique.

Il est facile de caractériser les points ayant une orbite ultimement périodique.

Proposition

Ce sont les nombres rationnels.

Peut on trouver un point dont l'orbite est dense ?

On s'intéresse au développement en base 3 d'un nombre réel de $[0, 1]$.

Theorem

Soit b un entier strictement positif différent de 1. Alors pour tout réel positif x il existe une unique suite d'entiers $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

- $u_n \in \{0, \dots, b-1\}$ *si* $n \geq 1$.
- *La suite n'est pas égale ultimement à la suite constante* $(b-1)^\omega$.
- $x = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{b^n}$.

On considère l'application $\pi : X \mapsto \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ qui à x associe $(u_n)_n$. Cette application est définie et on voit que

$$\pi \circ T = S \circ \pi$$

ou S est le shift (décalage).

$$S(u_n)_n = (u_{n+1})_n$$

Par exemple $\pi(1/3) = 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$. Ou alors $1/2 = \sum_{n \geq 1} 1/3^n$, donc $\pi(1/2) = 11111, \ldots 1 \ldots$

On a remplacé le système (X, T) par le système (Y, S) ou Y est l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ qui ne sont pas ultimement égales à 2.

Considérons alors la suite

$$0, 1, 2, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 000, 001, 002, 010, 0011, \ldots$$

Proposition

Cette suite a une orbite sous S qui est dense dans Y.

Voir plus tard.

On regarde le développement en base 10 de $\sqrt{2}$. Une **question ouverte** est: 0 apparaît il infiniment souvent ? Ceci est lié à la **fréquence des chiffres**.

Voir plus tard avec l'ergodicité.

Dans la suite

- Définition de la dynamique symbolique
- Plusieurs classes de systèmes symboliques
- Des outils pour étudier les systèmes et les classer.
- Des systèmes dynamiques généraux

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. Un **mot fini** est un élément de $\mathcal{A}^n$. Sa longueur est n.

Soit $v \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, un **facteur** de v est un **mot fini** $v_i \ldots v_{n+i-1}$. Il est dit de longueur n.

L'ensemble des mots finis facteurs de v s'appelle le **langage de v.** L'ensemble des mots finis de longueur n de ce langage se note $L_n(v)$.

Exemple 00110101.

Mots de longueur un: $0, 1$.

Mots de longueur deux: $00, 01, 10, 11$

Mots de longueur trois $001, 010, 011, 101, 110$

Généralement les langages auront les propriétés d'être factoriel et prolongeables: c'est à dire que si u est dans le langage, alors tout facteur de u aussi, et il existe une lettre a telle que ua soit dans le langage (res au).

L'élément v s'appelle un **mot infini**. Un facteur de la forme $v_0 \dots v_k$ est un **préfixe** de v.

Pour un mot fini $u = u_0 \dots u_{r-1}$ le **cylindre** $[u]$ est l'ensemble des mots infinis ayant u comme préfixe.

On définit **deux topologies** sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

• La première est la topologie produit sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ à partir de la topologie discrète sur $\mathcal{A}$. cet espace est alors compact d'après le théorème de Tychonoff.

• Maintenant on définit une distance sur les mots infinis par

$$d(u, v) = d^{-n}$$

ou l'alphabet est de taille d et $n = \min\{k \in \mathbb{N}, u_k \neq v_k\}$. Ainsi deux mots sont proches s'ils coïncident sur un préfixe de grande taille.

Lemma

La formule définit bien une distance.

Lemma

On a alors :

- *Muni de cette distance l'espace est compact et complet.*
- *Les deux topologies coïncident.*
- *Les cylindres forment une base de la topologie.*
- *C'est un espace de Cantor: un espace compact totalement déconnecté sans point isolé.*

Prenon le cylindre [00] et regardons la boule ouverte de rayon $1/2$ de centre $00\ldots$ et la boule fermée de rayon $1/2^2$.

Si u est dans la boule ouverte, cela signifie que $d(u, 00000\ldots) < 1/2$.
Si on note la distance par $1/2^n$,cela signifie que $n > 1$. Donc u commence au minimum par 00. Donc u est dans le cylindre.

Si v est dans la boule fermée, alors de même en notant la distance $1/2^m$, on a $m \geq 2$. Mais pour les entiers, c'est la même chose. Donc la boule ouverte est aussi un fermé.

On définit **le shift** S comme une appliquation sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ par

$$S((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

Soit $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors **l'orbite** de u est $O(u) = \{S^i(u), i \in \mathbb{N}\}$.

On définit alors $X_u = \overline{\{S^i(u), i \in \mathbb{N}\}}$, cet ensemble est stable par S et fermé et fait partie de la classe des sous shift.

Lemma

Le shift est une application uniformément continue sur cet espace. L'ensemble X_u est un compact et S restreint à cet ensemble est continue, donc définit un autre système dynamique (X_u, S).

Exemple $u = 001001001001\ldots001\ldots$

On a $Su = 01001001001\ldots$

$$S^2u = 1001001001001\ldots$$

$$S^3u = 001001001\cdots = u$$

Donc l'orbite de u contient trois éléments. Ainsi X_u est un ensemble à trois éléments.

Proposition

On a équivalence entre:

- *Le mot infini v est dans X_u.*
- *Pour tout entier n on a $L_n(v) \subset L_n(u)$.*
- *Il existe une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'entiers tels que $v_0 \dots v_n = u_{k_n} \dots u_{k_n+n}$.*

De manière générale un **sous-shift** est un sous ensemble X fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ stable par S: $SX = X$.

Soit $u = 01101101.0000\dots0\dots$

Alors $000\dots0\dots$ est dans X_u,
mais pas $01010101\dots$.

Deux exemples importants traités ici:

- Full shift: orbites périodiques, orbite dense, ...
- Mot u ultimement périodique et X_u.

Soit u un mot ultimement périodique, décrire X_u.

C'est un ensemble fini. Il y a p éléments correspond à la période et ceux qui permettent de décaler u jusqu'à la période.

Full shift.

- Orbite périodique: nombre ?
- Orbite dense: exemple ?

Soit v mot fini de longueur n, alors je construis un mot infini périodique avec

$$v.v.v.v\dots v\dots$$

Conclusion: beaucoup d'orbites périodiques.

Le mot u décrit au début est dense dans le full shift.

Prenons x quelconque et $n \geq 1$.

Alors x commence par un préfixe v de longueur n.

Or v apparaît dans u, donc il existe k tel que $S^k u$ commence par v.
On en déduit $d(x, S^k u) \leq 1/2^n$.

On définit alors le **langage du sous -shift** X comme

l'ensemble des mots u tels qu'il existe $x \in X$ tel que u est facteur de x.

Les langages de sous-shift sont prolongeables et factoriels.

Exemple $X = \{(01)^\omega, (10)^\omega\}$.
Ce sous shift n'a que deux éléments. Ils sont échangés par S.

On verra qu'il est minimal, transitif, périodique.

Lemma

A tout sous shift correspond un langage prolongeable. Et à tout langage prolongeable correspond un sous shift.

Lemma

L'ensemble X est un sous shift s'il existe un ensemble F de mots finis tels que X est l'ensemble des mots infinis dont les facteurs ne sont pas dans F.

Proof.

On regarde le langage de X. On énumère les mots, cela donne F par complémentaire. Réciproquement c'est bien fermé et stable par shift. □

Un sous-shift X est **transitif** s'il existe $x \in X$ tel que l'adhérence de l'orbite x soit égale à X.

Proposition

Les trois points sont équivalents:

- *Un sous-shift X est transitif.*
- *Pour tous ouverts $U, V \subset X$ il existe $x \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in U$ et $S^n(x) \in V$. Ceci se lit comme*

$$\exists n \in \mathbb{Z}, S^{-n}V \cap U \neq \emptyset.$$

- *Pour tous mots finis u, v du langage, il existe $x \in X$ tels que u, v soient mots du langage de x.*

Bien remarquer que l'entier n est **relatif**. On utilisera la proposition après.

Un sous shift est **minimal** si pour tout $x \in X$ l'adhérence de l'orbite de x est égale à X.

Proposition

- *Un sous shift X est minimal si et seulement si il ne contient pas de sous shift non vide strictement inclus dans X.*
- *Un sous shift est minimal si et seulement si pour tous $x, y \in X$ les langages de x et de y sont identiques.*
- *Tout sous shift contient un sous shift minimal.*

Proposition

On a équivalence entre

- x *est ultimement périodique.*
- $O(x)$ *est fermée.*
- $O(x)$ *est finie.*

La **complexité** d'un mot infini est la fonction p définie sur $\mathbb{N}$ telle que $p(n)$ est le nombre de mots différents de longueur n présents dans le mot infini.

La **complexité d'un sous shift** est la fonction qui à n associe le cardinal de $\mathcal{L}_n(x)$.

Proposition

Si u est périodique, alors sa complexité est une fonction bornée.

Exemple

$$u = 101101101\ldots101\ldots$$

On calcule la complexité et on voit qu'elle est bornée.

Lemma

Dans un langage on a

$$p(n+m) \leq p(n)p(m).$$

Ainsi $\log p(n)$ *est sous additive.*

Lemma

Soit une suite u_n *qui est sous multiplicative, alors la suite* $\frac{\log u_n}{n}$ *converge.*

L'entropie topologique du sous shift est définie comme

$$h(X) = \lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n}$$

ou p désigne la complexité du langage du sous-shift.

Classes de sous-shifts

- Ceux d'entropie > 0
- ceux formés de mots ultimements périodiques.
- Ceux de complexité la plus faible possible mais pas bornée.
- les intermédiaires.

Si F est un ensemble de mots finis, alors on définit X_F comme le sous shift formé des x tel que u est un facteur de x implique u n'appartient pas à F.

Example

Prendre $F = \{00, 01, 10\}$ pour l'alphabet $\{0, 1\}$.

Proposition

Le problème de savoir si un sous-shift de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un SFT est décidable.

Proof.

Il suffit d'écrire le langage des mots de longueur m ou m est la taille maximale des mots interdits. $\square$

On considère un graphe orienté (c'est à dire que les arêtes sont orientées).

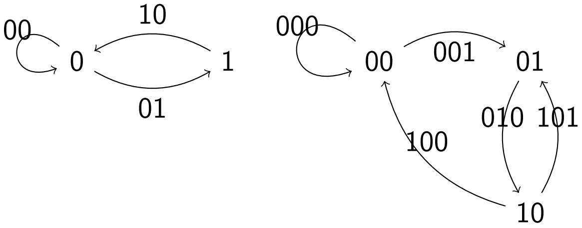
A un sous-shift est associé une suite de graphes G_n donnés par (V_n, E_n) avec

- V_n représente les mots de longueur n du sous-shift.
- E_n représente les mots de longueur $n+1$ du sous shift,
- L'arête entre les sommets U, V existe s'il existe deux lettres a, b telles que $Ua = bV$ soit dans le langage. Dans ce cas Ua est l'étiquette de l'arête.

On remarque que l'on peut aussi étiquetter les arêtes par a, vu qu'elles sont orientées. ✠

Ce sont les **graphes de Rauzy** du langage.

Prenons $F = \{11\}$

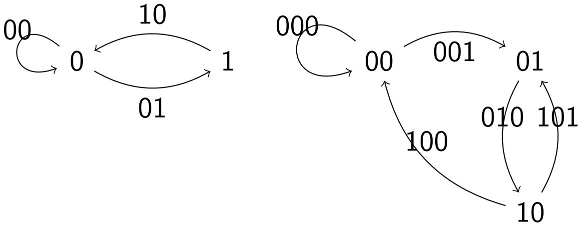


Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{N})$ une matrice qui représente le graphe d'adjacente d'un graphe. Elle a pour taille le nombre de sommets du graphe et $A_{i,j}$ vaut 1 s'il existe une arête orientée de i vers j. Il vaut 0 sinon.

Lemma

Etudier le SFT revient à étudier G_n ou $n+1$ est la taille maximale des mots interdits.

Pour $F = \{11\}$ on obtient le graphe suivant et la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Dessin des deux premiers graphes des mots. Le premier contient toutes les informations.

Proposition

La matrice est irréductible si et seulement si le graphe est fortement connexe.

Proof.

Si le graphe est connexe, on peut passer d'un sommet à n'importe quel autre. Ainsi on a un chemin de longueur n. Maintenant on montre par récurrence que le coefficient (i, j) de A^n est non nul si et seulement si il existe un tel chemin. □

Proposition

La matrice est irréductible si et seulement si le SFT est transitif.

Proposition

On considère un SFT défini par un graphe orienté de matrice A. On a alors $p(n+k) = \sum_{i,j} A^n_{i,j}$ pour tout entier n.

Proof.

On considère le graphe du SFT étiqueté avec les sommets. Un chemin passant par n arêtes relie $n+1$ sommets donc définit un mot de longueur $n+1$. La formule sur la complexité s'en déduit. □

Example

On considère sur un alphabet à deux lettres le SFT donné par $F = \{11\}$. Son entropie est égale à $\ln \varphi$.

On diagonalise la matrice, on calcule A^n.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On veut estimer $\sum_{i,j} A^n_{i,j}$.

On diagonalise A: elle possède deux valeurs propres distinctes: φ et $-1/\varphi$.

$$A = PDP^{-1}$$

et $D = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -1/\varphi \end{pmatrix}$

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Et $\sum_{i,j} A^n_{i,j} \approx C\varphi^n$.

$$h_{top} = \lim \frac{\log p(n)}{n}.$$

Attention: on prouve le théorème dans le cas irréductible, et on invoque un autre théorème pour conclure. On montrer que l'entropie se concentre sur l'ensemble non errant. De plus l'ensembe non errant est union disjointe de sous-shifts, donc sft, disjoints. Et enfin l'entropie de l'union disjointe de deux sous shifts est le maximum. ✠

Theorem

L'entropie topologique d'un SFT est égale à $\ln \lambda$ *où* λ *est le rayon spectral de la matrice.*

Proposition

Soit $b(d)$ le nombre de mots périodiques de période exactement d. Pour un SFT on a $\sum_{d|n} b(d) = tr(A^n)$ pour tout entier n.

On repart de l'exemple. On voit que A possède deux valeurs propres $\varphi, 1-\varphi$. On en déduit la trace de A^n qui vaut

$$\varphi^n + (1-\varphi)^n$$

$b(1) = 1$ car seulement $0\dots0$ $b(2) = 2$ avec $01010101\dots, 10101010\dots$.

$$\varphi^2 + (1-\varphi)^2 = 2(1+\varphi) - 2\varphi + 1 = 3 = b(2) + b(1)$$

Considérons un graphe fini orienté dont les arêtes sont étiquetées par un ensemble fini $\mathcal{A}$. On lui associe un ensemble de suites définies par: une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans l'ensemble si pour tout entier n on a $t(e_n) = i(e_{n+1})$ ou $t(e)$ est le sommet terminal de l'arête.

Lemma

Les concaténations des étiquettes des chemins bi-infinis définissent un sous-shift.

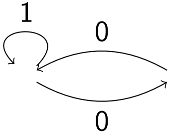
Proof.

Il faut voir que c'est fermé et invariant par décalage: facile. □

On appelle **sous shift sofique** le sous-shift défini ainsi.

Example

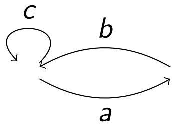
Exemple de shift sofique.



C'est l'**even shift**. En effet, on peut remarquez que cela revient à interdire les plages de 0 de longueurs impaires.

Ce n'est pas un SFT.
Raisonnons par l'absurde. S'il l'est, notons N la taille maximale d'un mot interdit. Considérons alors $0^\infty 1 0^{2N+1} 1 0^\infty$. Il n'est pas dans le subshift vu qu'il y a une plage de zéros de longueur impaire. Pourtant les mots interdits ne le détectent pas.

Notons les arêtes précédentes par des lettres différentes.



On a alors un SFT en interdisant les mots

$$ac, aa, bb, cb$$

La matrice du SFT est $\big(???\big)$

Proposition

Tout SFT est obtenu à partir d'un tel graphe.

Proof.

Soit m la taille maximale des mots interdits. On définit un automate dont les sommet sont les mots de taille m admissibles. A chaque mot de taille m non interdit correspond un état. Transition entre u et v par awb si on a: $u = aw, v = wb$. Un mot interdit ne peut être lu qu'en partant d'un état qui n'existe pas. Réciproquement tout mot sans facteur interdit correspond à un chemin bi infini dans le graphe. □

Proposition

Pour tout shift sofique, il existe un SFT qui se projette dessus.

Example

Pour l'even shift on trouve $F = \{aa, ac, bb, cb\}$, et X_F est un SFT sur l'alphabet à 3 lettres. On projette b, c sur 0 et a sur 1.

Corollary

Ainsi un sofique est un **facteur** *d'un SFT.*

Proof.

On montre qu'il y a commutation avec le shift, et que l'application du SFT dans le sofique est surjective. La surjectivité est évidente par construction. La commutation aussi ✠.

$\square$

Proposition

Si la suite des arêtes définit une unique suite de sommets, alors le sofique est SFT. Pas le cas du even shift par exemple: dit autrement plusieurs arêtes sont étiquetées par les mêmes choses.

Mesure de probabilité μ sur X:
$\mu(X) = 1$, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
Egalité s'ils sont disjoints.

Une **mesure invariante** pour le système dynamique (X, T) est une mesure de probabilité sur X telle que pour tout ensemble A mesurable

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Une mesure invariante est **ergodique** si $T^{-1}A = A$ implique $\mu(A)$ égal à 0 ou 1.

Un système est **uniquement ergodique** s'il n'a qu'une seule mesure invariante.

Lemma

Pour un système (X, T) avec X compact et T continue, il existe toujours une mesure invariante.

Lemma

L'ensemble des mesures invariantes de (X, T) forme un convexe, dont les points extremaux sont les mesures ergodiques. On en déduit qu'un système uniquement ergodique posssède une unique mesure ergodique.

Penser à un triangle ou un tétraèdre.

Une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R}$ mesurable est dite T invariante si $f \circ T = f$.

Lemma

T est ergodique pour la mesure μ si et seulement si toute fonction T invariante dans $L^1(X, \mu)$ est constante μ presque partout.

Définition utile ultérieurement.

Lemma (Poincaré)

Soit A de mesure positive pour μ mesure invariante de probabilité, alors presque tout point de A revient sur A.

Définir la fonction de **premier retour** sur A

$$x \mapsto T^{n_x}(x)$$

Theorem (Birkhoff)

Pour tout fonction $f \in L^1(X, \mu)$ la suite

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} f(T^k x)$$

converge μ presque partout. De plus si on note $g(x)$ la limite alors on a

- $g \circ T = g$
- *La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^1 vers g.*
- $\int g d\mu = \int f d\mu$.

Corollary

Si μ est une mesure ergodique alors la limite est constante μ presque partout et vaut $\int f d\mu$.

Theorem

Si (X, T) est uniquement ergodique, alors pour toute fonction continue sur X à valeur réelle, on a

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} f(T^k x) = \int_X f(x) d\mu$$

Fréquence d'une lettre.

Soit (X, S) un sous-shift et $x \in X$ avec i lettre de l'alphabet. Soit μ une mesure ergodique.
Le théorème dit que pour μ presque tout x la suite $\lim \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \xi_{[i]}(S^k x)$ converge. Or cette suite compte $\frac{card\{k \leq n| \quad x_k = i\}}{n}$. Ainsi la fréquence de i dans x existe pour μ presque tout x. De plus elle est constante presque partout.

Theorem (Oxtoby)

Si (X, T) est minimal, non uniquement ergodique, alors il existe $x \in X$ et un mot fini w tel que la fréquence de w dans x ne soit pas définie.

Critère d'unique ergodicité

On note $N(w, u_k \dots u_{k+n-1})$ le nombre d'occurrences de w dans le mot fini $u_k \dots u_{k+n-1}$.

Proposition

Soit u une suite telle que pour tout facteur w, la suite $\frac{N(w,u_k \dots u_{k+n-1})}{n}$ admette une limite uniformément en k. Alors le sous shift (X_u, S) est uniquement ergodique.

Soit (X, T, μ) un système dynamique. Soit $H = L^2(X, \mu)$ un espace de Hilbert, on note U **l'opérateur de Koopman** défini par

$$U(f)(x) = f(Tx).$$

On remarque que $U^n(f)(x) = f(T^n x)$. On supposera T inversible dans la suite.

Si f est une fonction dans $L^2(X, \mu)$ vérifiant $Uf = \lambda f$, alors le nombre complexe λ est une valeur propre. L'ensembles des valeurs propres est le **spectre** de U. Si 1 est la seule valeur propre et qu'elle est de multiplicité un, on dit que T est **faiblement mélangeant**.

Theorem (Von Neumann)

Soit P la projection orthogonale sur l'espace des fonctions fonctions propres de U: $Ug = g$, alors on a pour tout x au sens de la convergence L^2:

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} U^k f = P(f)$$

Lemma

L'ensemble des valeurs propres forme un sous-groupe du cercle unité.

Proposition

Le système (X, T, μ) est ergodique si et seulement si pour tout ouverts U, V on a

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \mu(T^{-k} U \cap V) = \mu(U)\mu(V)$$

Proposition

Le système (X, T, μ) est faiblement mélangeant si et seulement si pour tous les ouverts U, V on a

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} |\mu(T^{-k}U \cap V) - \mu(U)\mu(V)| = 0$$

Proposition

Le système est faiblement mélangeant si et seulement si l'opérateur U n'a pas de fonction propre non triviale.

Proposition

Le système est faiblement mélangeant si et seulement si il existe $E \subset \mathbb{N}$ de densité nulle tel que $\lim \mu(T^{-n}U \cap V) = \mu(U)\mu(V)$ *si $n \notin E$.*

Le système (X, T, μ) est dit **mélangeant** si $\lim \mu(T^{-n}U \cap V) = \mu(U)\mu(V)$.

Theorem

On a les implications:
mélangeant implique faiblement mélangeant implique ergodique.

Theorem

T est faiblement mélangeant si et seulement si $T * T$ est ergodique.

Corollary

Une translation n'est pas faiblement mélangeante, car $T * T$ n'est pas ergodique.

Theorem (Von Neumann)

On a:

- *Deux transformations ergodiques et inversibles avec même spectre discret sont isomorphes en mesure.*
- *Un système inversible ergodique à spectre discret est isomorphe à une translation sur un groupe compact.*

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini, une **substitution** est un morphisme du monoide libre $\mathcal{A}^*$.

Il suffit de connaître l'image de chaque élément de $\mathcal{A}$.

Le mot de **Fibonacci** est le point fixe de la substitution

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{A}^* & \to & \mathcal{A}^* \\ & a & \mapsto & ab \\ & b & \mapsto & a \end{array}$$

Le mot de **Thue Morse** est le point fixe de la substitution

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \mathcal{A}^* & \to & \mathcal{A}^* \\ & a & \mapsto & ab \\ & b & \mapsto & ba \end{array}$$

Si σ est une substitution, alors on définit un sous shift X_σ comme l'ensemble des mots infinis tels que tout facteur de ces mots apparaisse dans un $\sigma^n(a)$, avec a lettre et n entier.

On va voir une façon plus simple après de trouver des mots infinis dans X_σ.

La **matrice d'incidence** de la substitution est la matrice qui compte le nombre d'occurences de chaque lettre dans l'image d'une lettre. Dans l'exemple précédent on trouve $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une substitution est **uni modulaire** si son déterminant vaut ± 1.

Le **vecteur de Parikh** Φ_u d'un mot est un vecteur de $\mathbb{N}^d$ qui compte le nombre d'occurences de chaque lettre dans u.

Proposition

Pour un mot fini u, on a

$$\Phi_{\sigma(u)} = M\Phi_u.$$

On a donc un diagramme commutatif entre σ et M_σ via l'abélianisation.
On appelle **point fixe** de la substitution σ un mot u tel que $\sigma(u) = u$. Il n'existe pas forcément, cf exemple $a \mapsto b, b \mapsto a$. On appelle **point périodique** de la substitution σ un mot u tel que $\sigma^k(u) = u$ pour un certain k.

Proposition

Supposons que l'image d'une lettre a a une longueur strictement plus grande que 1 *et commence par elle même. Dans ce cas la suite* $(\sigma^n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un* **mot infini** *point fixe.*

Proof.

On écrit $\sigma(a) = au$, on compose $\sigma^2(a) = au\sigma(u)$, et donc $\sigma^n(a) = au\sigma(u)\ldots\sigma^{n-1}(u)$. La suite des longueurs croit, et chaque $\sigma^n(a)$ est préfixe de $\sigma^{n-1}(a)$. Ainsi on montre facilement que la suite est de Cauchy, donc converge. Il est alors facile de voir que la limite est point fixe. $\square$

Ce point fixe u définit un sous shift en posant, ou S est le décalage:

$$X_u = \overline{\{S^n u, n \in \mathbb{N}\}}$$

Remarquons que l'on a toujours $X_u \subset X_\sigma$.

Example

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{A}^* & \to & \mathcal{A}^* \\ & a & \mapsto & ab \\ & b & \mapsto & a \end{array}$$

Le point fixe est donné par

$$u = abaababa\ldots$$

La substitution est dite **primitive** s'il existe un entier n tel que M^n soit à coefficients strictement positifs.

Ainsi à toute substitution primitive on peut associer une **valeur propre** dominante de M et un **vecteur propre** à droite à coefficients positifs.

Theorem

Le sous shift associé à une substitution primitive est minimal. Ainsi on a

$$X_\sigma = X_u$$

Proof.

On a $u = \sigma^k(u) = \sigma^k(u_0)\sigma^k(u_1)\dots$ Or par primitivité on peut trouver k tel que toute lettre b apparait dans tout $\sigma^k(a)$. Donc b apparait avec lacunes bornées dans u. Ainsi $\sigma^n(b)$ apparait dans $\sigma^n(u) = u$ pour tout entier n avec lacunes bornées. Et donc le point fixe est uniformément récurrent, et on conclut à la minimalité par la proposition du premier chapitre. $\square$

Attention il faut regarder σ^N pour avoir une matrice > 0.

Proposition

Le sous shift associé à une substitution vérifie

$$h_{top}(X_\sigma) = 0$$

Proof.

Cela se démontre via le théorème de Pansiot, voir plus loin, qui caractérise les complexités de points fixes de substitution. □

Attention, une substitution non primitive peut avoir un point fixe dont le sous shift est minimal.

Proposition

La substitution de **Chacon** *a un point fixe donnant un sous-shift minimal:*

$$\begin{cases} 0 \mapsto 0010 \\ 1 \mapsto 1 \end{cases}$$

Proposition (Ergodicité de Thue Morse)

Le sous shift associé est uniquement ergodique.

Peut se prouver à la main en regardant les fréquences ...

On peut refaire pareil, et on a

Theorem

Le sous shift associé à une substitution primitive est uniquement ergodique.

Proposition

Pour une substitution primitive, la fréquence d'une lettre i est donnée par

$$\frac{R_i}{\sum R_j},$$

ou R est un vecteur propre **à droite** *de la valeur propre de Perron Frobenius.*

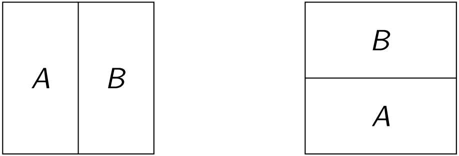
Une substitution est de **type Pisot** si sa valeur propre dominante est un nombre algébrique dont les conjugués sont de module strictement plus petit que 1 et non nuls.

Proposition

Une substitution de type Pisot est primitive et irréductible.

Comme conséquence, on voit qu'une substitution de longueur constante n'est pas Pisot.

On considère l'application de $[0,1]^2$ dans lui même définie par le dessin: Attention on étale et on replace au dessus. On ne tourne pas !



Proposition

Le codage donne un full shift.

Proof.

Détails✠On recode l'image, et on itère encore une fois

BA	BB
AA	AB

A chaque étape on voit bien que l'on a 2^n mots, donc c'est le full shift sur un alphabet à deux lettres. □

Autre exemple de fer à cheval.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice de déterminant ± 1. Elle définit une application f_A

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^n &\to \mathbb{T}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

C'est un **automorphisme linéaire**. On remarquera que le tore est un groupe.

Lemma

C'est bien défini, et c'est un automorphisme si et seulement si $det(A) = \pm 1, A \in M_n(\mathbb{Z})$.

Proof.

En prenant un exemple on voit que: Si f_A injective, alors $det(A) \neq 0$. De plus si $det(A) \neq 0$, alors le déterminant doit valoir ± 1. La réciproque est évidente. □

L'automorphisme est dit **hyperbolique** si A n'a pas de valeur propre de module 1.

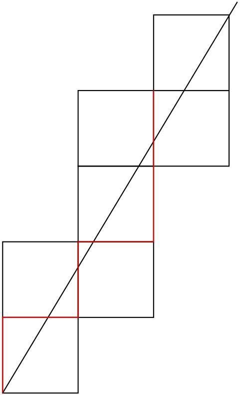
Theorem

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique de valeurs propres λ_1, λ_2. On a

- *Les points périodiques sont* $\{(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}) | 0 \leq p_1, p_2 \leq q\}$
- *Si $det(A) = 1$, alors le nombre $b(n)$ de points de période n vérifie*
$$\sum_{d|n} b(d) = |tr(A^n) - 1 - (detA)^n|^2.$$
- *L'application est ergodique.*

Voir exemple sur internet: Arnold's cat map.

Soit d une demi droite du plan passant par l'origine. On appelle **dépliage** la ligne brisée passant par les points entiers les plus proches de la droite. Un dépliage est alors codée par un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en codant les horizontales et les verticales par 0 et 1.



On définit le **billard** dans le carré comme

$$T : \partial P \times [0, 2, \pi] \to \partial P \times [0, 2, \pi]$$

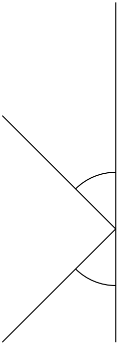
$$T(m, \theta) = (p, \psi)$$

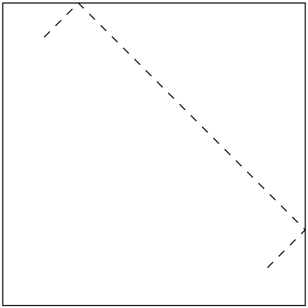
Proposition

Fixons une direction pour le flot du billard, on a:

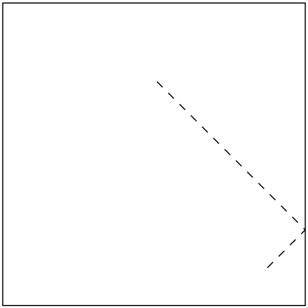
- *Pour le flot du billard dans le carré, le premier retour sur la diagonale est un échange de deux intervalles.*
- *Le flot du billard dans le carré est la même chose qu'une droite coupant le réseau $\mathbb{Z}^2$.*

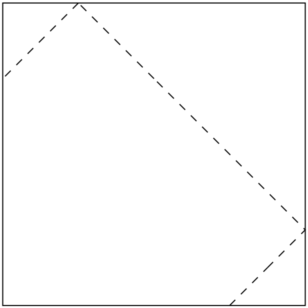
Ainsi se donner un mot sturmien est équivalent à un dépliage de pente irrationnelle.





On peut aussi seulement regarder ce qui se passe sur le bord.

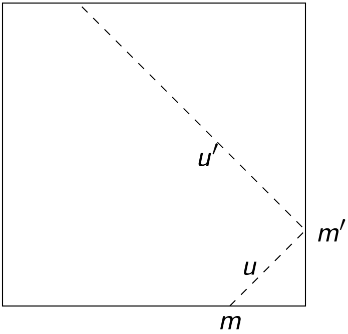




Definition

On part d'un point du bord m et d'une direction u.
On lui associe un couple (m', u') tel que

- m' est sur le bord
- (mm') est parallèle à la direction u
- u' est le symétrique de u par rapport à la tangente en m' au bord.



u'
m'
u
m

On est passé du **jeu de billard** à l'étude d'une fonction

$$T : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ (m, u) & \mapsto & (m', u') \end{array}$$

L'étude de cette fonction rentre dans les **systèmes dynamiques**.

Proposition

On a

- *Billard cube : Retour sur hexagone: translation sur le tore: échange de trois morceaux dans hexagone.*
- *Billard hypercube, même chose.*

Bernoulli shifts.

Mesure produit sur full shift obtenue avec mesure [0] égale à p et mesure cylindre [1] égale à $1 - p$ pour $0 \leq p \leq 1$.

Soit (X, T) un système dynamique. On considère $\mathcal{P}$ une partition finie de X et un codage

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & \varphi(x) = (u_n)_{\mathbb{N}} \end{array}$$

ou $u_n = i$ si $T^n x \in P_i$ et $|\mathcal{A}| = card\mathcal{P}$. On note alors pour la topologie produit

$$\Sigma = \overline{\varphi(X)}.$$

Cela définit un **sous-shift** (Σ, S).

Proposition

On a la relation suivante entre (X, T) et (Σ, S):

$$\varphi \circ T(x) = S \circ \varphi(x)$$

Lemma

Si x est un point d'orbite périodique, alors $\varphi(x)$ est un mot périodique.

Une partition est **génératrice** si μ presque tout point a un unique codage. Cela revient à la définition ultérieure.
Une partition est dite de **Markov** si elle est génératrice pour tout point et que le système symbolique soit un SFT.

Odomètres: cf cours Maryam